

Singularitas Ruang-Waktu Bermetrik De Sitter dalam Relativitas Umum

Leni Rumiyantri, & M. Farchani Rosyid

Jurusan Fisika FMIPA Universitas Lampung

Jurusan Fisika, FMIPA Universitas Gadjah Mada

Jl.Prof. Dr. Soemantri Brojonegoro No.1 Gedung Meneng Bandar Lampung 35145

E-mail: leni.rumiyantri@gmail.com

Diterima (1 Januari 2016) Direvisi (27 Januari 2016)

Abstract. Spacetime singularity in general theory of relativity has been considered. The definition of singularity was used based on the Kretschmann scalar criteria. The character of spacetime geometry in the region around singularity for de Sitter metric has been identified according to calculation. The dynamics of test particle in the region around singularity has also been considered (there is no outside force acted on the test particle). The discussion was concerned with the geodesic equation for that metric.

Keyword: Geodesic equation, Kretschmann scalar, singularity.

Abstrak. Singularitas ruang-waktu dalam Teori Relativitas Umum telah ditinjau. Definisi daerah singularitas diperjelas dengan menggunakan kriteria berdasarkan skalar Kretschmann. Watak geometri ruang-waktu di daerah sekitar singularitas pada metrik de Sitter telah diketahui berdasarkan perhitungan. Dinamika partikel uji di daerah sekitar singularitas pun ditinjau (tidak ada gaya luar yang bekerja pada partikel uji). Pembahasannya terkait dengan persamaan geodesik untuk metrik tersebut.

Kata kunci: Persamaan geodesik, skalar Kretschmann, singularitas.

PENDAHULUAN

Salah satu model matematis yang cukup mashur di bidang fisika adalah mekanika klasik dan teori gravitasi. Mekanika klasik diusulkan oleh Newton untuk menjelaskan gerak. Sementara, gravitasi dimaksudkan sebagai gaya tarik-menarik antara dua benda bermassa yang bergantung pada jarak antara keduanya. Newton pun berpendapat bahwa ruang dan waktu bersifat mutlak. Pemutlakan ini bertahan dalam waktu yang cukup lama sampai akhirnya dimandulkan oleh Einstein pada 1905.

Menurut Einstein, ruang dan waktu bersifat relatif. Einstein berpendapat ruang dan waktu tidak mungkin ada tanpa yang lainnya; keduanya membentuk ruang-waktu yang ditimbulkan oleh segenap peristiwa. Oleh karena itu, Einstein menganggap ruang-waktu bukanlah sesuatu yang dapat memiliki eksistensi mandiri, melainkan eksistensinya ditentukan oleh materi dan energi. Gravitasi pun dianggap Einstein bukan sebagai gaya, akan tetapi manifestasi kelengkungan ruang-waktu.

Akhirnya, pada 1915 Einstein mengajukan Teori Relativitas Umum (TRU). TRU adalah teori yang menjelaskan gravitasi, pengaruh sebaran massa, dan energi ya-

ng mengakibatkan perubahan ruang-waktu. Ketika sebaran massa dan energi terpusat pada suatu tempat, hingga mencapai batas maksimal dengan kelengkungan yang sudah tidak dapat dipertahankan lagi dan akhirnya “berlubang”, maka terbentuklah singularitas ruang-waktu.

Keberadaan singularitas ruang-waktu sampai saat ini diprakirakan dapat ditemukan di dua keadaan, yaitu daerah dengan medan gravitasi yang sangat kuat seperti *black hole* (Penrose, 1964) dan sesaat setelah dentuman besar seperti *big bang* (Hawking, 2005).

Singularitas ruang-waktu terdiri atas dua jenis, yaitu singularitas semu dan singularitas nyata. Singularitas semu adalah singularitas yang dapat dihindari dengan alih-ragam koordinat. Sementara, singularitas nyata adalah singularitas yang tidak dapat dihindari dengan alih-ragam koordinat (Hawking dan Ellis, 1973). Singularitas semu dapat dicari dengan menggunakan kriteria tensor metrik. Sementara, singularitas nyata dapat dicari dengan menggunakan berbagai macam kriteria, salah satunya adalah skalar Kretchmann. Skalar ini pertama kali diperkenalkan oleh Kretchmann pada 1915 (Geovanelli, 2012). Skalar Kretchmann adalah hasil kontraksi atau lacak *trace* dari tensor kelengkungan Riemann yang dituliskan :

$$\mathcal{R} = R^{\mu\nu\sigma\rho} R_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (1)$$

Joshi (2007).

Dipilihnya skalar Kretchmann dikarenakan skalar ini tidak bergantung pada sistem koordinat. Artinya, sekali singularitas pada suatu sistem koordinat, maka akan tetap singularitas pada sistem koordinat lain. Skalar ini menunjukkan adanya singularitas jika bernilai tak berhingga. Jika baik tensor metrik maupun skalar Kretchmann pada suatu ruang-waktu bernilai tak berhingga, maka singularitas yang terjadi adalah singularitas nyata. Akan tetapi, jika tensor metriknya bernilai tak berhingga sementara skalar Kretchmannnya tidak, maka singularitas yang terjadi hanyalah singularitas semu saja.

Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan TRU untuk mengetahui watak geometri ruang-waktu dan dinamika partikel uji

di daerah sekitar singularitas untuk metrik de Sitter. Metrik de Sitter adalah solusi eksak bagi persamaan medan Einstein vakum, dimana diasumsikan bahwa penyusun utama alam semesta adalah materi bukan radiasi (de Sitter, 1917).

Pembahasan watak geometri ruang-waktu di sekitar daerah singularitas dipusatkan pada pencarian daerah singularitas dengan menggunakan kriteria skalar, yaitu skalar Kretchmann. Sementara, pembahasan dinamika partikel uji di sekitar daerah singularitas itu mengabaikan gaya luar apapun. Artinya, hal ini berkaitan dengan persamaan geodesik yang dituliskan :

$$\frac{d^2(x^\mu \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d(x^\alpha \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^\beta \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad (2)$$

O’Neil (1995). Geodesik pada TRU dapat digunakan untuk menelaah gerakan jatuh bebas partikel dalam ruang bermetrik tertentu (Anugraha, 2011).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kajian teoritis. Oleh sebab itu, akan banyak dilakukan perhitungan matematis yang bersifat tedesius sehingga digunakanlah alat bantu program simbolik, yaitu Maple 13.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Watak Geometri Ruang-Waktu

Tensor metrik pada metrik de Sitter adalah

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ g_{11} &= \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \\ g_{22} &= r^2 \\ g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Jika melihat tensor metric tersebut di atas, maka singularitas diprediksi akan terjadi ketika $r = R$. Hal ini dikarenakan ketika $r = R$, tensor metrik g_{11} bernilai tak berhingga.

Prediksi terjadinya singularitas ruang-waktu harus diuji dengan menggunakan nilai skalar Kretchmann pada metrik itu. Berdasarkan perhitungan skalar Kretchmann pada metrik de Sitter, diperoleh

$$\mathcal{R} = \frac{24}{R^4}. \quad (4)$$

Ketika skalar Kretchmann dievaluasi di $r = R$, diperoleh

$$\mathcal{R} \neq \infty. \quad (5)$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, dapat dikatakan bahwa tidak ada singularitas ruang-waktu pada metrik de Sitter. Hal ini karena skalar Kretchmann bernilai berhingga. Daerah $r = R$ hanyalah singularitas semu saja. Artinya, horizon peristiwa pada metrik de-Sitter adalah daerah $r = R$. Hal ini sesuai dengan rujukan Ripken (2013).

Dinamika Partikel Uji

Pemahaman tentang dinamika partikel uji di sekitar daerah singularitas dimana tidak ada gaya luar yang bekerja pada partikel uji tersebut dapat diperoleh dengan mengetahui perilaku geodesiknya. Untuk mengetahui perilaku geodesiknya, maka diperlukan lambang *Christoffel* yang tidak nol dari tensor metrik de Sitter.

Pada koordinat t , yaitu

$$d^2t(\tau)/d\tau^2 - 2r \frac{dt(\tau)}{d\tau} \frac{dr(\tau)}{d\tau} / (R^2 - r^2) = 0. \quad (6)$$

Pada koordinat r , yaitu

$$d^2r(\tau)/d\tau^2 + r(R^2 - r^2) \left(\frac{dt(\tau)}{d\tau} \right)^2 / R^4 + r \left(\frac{dr(\tau)}{d\tau} \right)^2 / (R^2 - r^2) -$$

$$r(R^2 - r^2) \left(\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} \right)^2 / R^2 - r \sin^2 \theta (R^2 - r^2) \left(\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right)^2 / R^2 = 0. \quad (7)$$

Pada koordinat θ , yaitu

$$d^2\theta(\tau)/d\tau^2 + 2 \frac{dr(\tau)}{d\tau} \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} / r - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Pada koordinat ϕ , yaitu

$$d^2\phi(\tau)/d\tau^2 + 2 \frac{dr(\tau)}{d\tau} \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} / r + 2 \cos \theta \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} / \sin \theta = 0. \quad (9)$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa tidak ada daerah singularitas pada metrik de Sitter, yang ada hanyalah singularitas semu di daerah $r = R$. Persamaan geodesik metrik de Sitter pada koordinat t adalah **Persamaan 6**, koordinat r adalah **Persamaan 7**, koordinat θ adalah **Persamaan 8**, dan koordinat ϕ adalah **Persamaan 9**.

DAFTAR PUSTAKA

- Anugraha, R., 2011, *Teori Relativitas dan Kosmologi*, Fakultas MIPA UGM, Yogyakarta.
- De Sitter, W., 1917, On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis. *Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Proceedings*, 19 II, pp. 1217-1 225.
- Giovanelli, M., 2012, *Erich Kretschmann as a Proto-Logical-Empiricist: Adventures and Misadventures of the Point-Coincidence Argument*, University of Tübingen, Germany.

Leni Rumiyantri dkk : Singularitas Ruang-Waktu Bermetrik
De Sitter dalam Teori Relativitas Umum

- Hawking, S.W., dan Ellis, G.F.R., 1973, *The Large Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hawking, S. W., 2005, *The Theory of Everything*, Phoenix Books, Beverly Hill.
- Joshi, P.S., 2007, *Gravitational Collapse and Spacetime Singularity*, Cambridge University Press, Cambridge.
- O'Neill, B., 1995, *The Geometry of Kerr Black Holes*, AK Peters, New York.
- Penrose, R., 1964. Gravitational Collapse and Spacetime Singularities, *Physics Review Letter* Volume 14, Number 3.
- Ripken, A. C., 2013, Coordinate System in De Sitter Spacetime, *Tesis*, Physics and Mathematics, Radboud University Nijmegen, Nijmegen.